



OBRAZOVNI ALATI U NASTAVI MATEMATIKE

Ivana Kostić Kovačević¹, Duško Lukač², Jelena Gavrilović¹, Dunja Đurović¹

¹Univerzitet Singidunum, Beograd

²Rheinische Fachhochschule University of Applied Sciences

Abstract:

Primarna upotreba obrazovnih alata za matematičke svrhe je kvalitetna verifikacija rezultata. Postoje različiti alati za razvijanje logike učenika zasnovane na interaktivnosti. Matematički obrazovni alati su dizajnirani za inovativno, interaktivno i dinamičko učenje u različitim oblastima matematike. Ovaj rad ima za cilj da opiše primenu obrazovnih alata sa kojim može da razvije interaktivnost i pomogne učenicima i studentima da bolje, jasnije razumeju matematiku i da shvate da je ona svuda oko nas, da je naša svakodnevica.

Key words:

obrazovni alati,
nastava matematike,
MatLab.

UVOD

Matematika je jedna od najstarijih nauka. Njen osnovni cilj je da ubrza civilizacijski razvoj. Prvi matematičari su imali status polu-bogova. Galileo Galilej rekao je: „Veliku knjigu prirode mogu čitati samo oni koju znaju jezik kojim je napisana, a to je matematika”, a Laplas je čak tvrdio da je i sam Bog matematičar.

A danas se često u našim školama i fakultetima čuje da je matematika bauk, da izaziva strah, nesigurnost, frustracije i odbojnost. Nažalost u 21. veku kod nas je matematika kamen spoticanja đacima i studentima. A ne bi smela!

Laici i oni koji je ne znaju često kažu da je matematika apstraktna nauka koja ne služi ničemu i da se bez nje može. A činjenica je da matematika prožima bez izuzetka, prirodne, društvene i tehničke nauke i omogućava unapređenje i funkcionisanje društva.

Da je kod nas situacija alarmantna ukazuju rezultati PISA testiranja koji su pokazali da naši učenici ni u jednoj od testiranih aktivnosti, a to je domen čitalačke, matematičke i naučne pismenosti nisu postigli zadovoljavajuće rezultate. Naši đaci su u konkurenciji 57 zemalja sveta zauzeli 41. mesto Ovi rezultati za nijansu bolji od prethodnog PISA testiranja, na kome su naši učenici zauzeli poslednje mesto u Evropi.

Ovo testiranje pokazuje da znanje koje se stiče u našim školama ne zadovoljava čak ni prosečne kriterijume ovog međunarodnog testiranja kojim se ispituje u kojoj meri su deca ovladala znanjima koja im pomažu da se snalaze u realnom životu i da li su savladali osnovnu naučnu pismenost.

Kada je matematika u pitanju PISA test je pokazao da više od dve trećine učenika naših škola se ne snalazi u matematičkim problemima koji se odnose na realan svet i ne vide matematiku kao aparat za njihovo rešavanje. A matematika se nalazi svuda oko nas. Bilo da se srećemo sa svakodnevnim situacijama, kao što je vraćanje kusura, računanje vremena ili obračuna kamate u banci, do sistematskog korišćenja matematike u tehnici, ekonomiji, medicini, filologiji, sociologiji i sličnim situacijama.

Ozbiljan problem je kako zainteresovati našeg prosečnog učenika i studenta i motivisati ga da matematiku počne da sagledava na drugi način? Da li je i motiv nalaženja dobrog posla, kreativnog, inovativnog dobro plaćenog? Možda ih treba upoznati sa podacima koje *Wall Street Journal* svake godine izbacuje u vidu liste najprofitabilniji zanimanja. Među prvih 20 zanimanja, 11 su zanimanja koja imaju direktnu vezu sa matematikom, kao što su: Računovođa, Statističar, Softverski inženjer, Analitičar za kompjuterske sisteme, Ekonomista, Fizičar, Programer i slično.

Imajući u vidu iznete podatke, postavlja se pitanje šta učiniti da se ovo nimalo ohrabrujuće stanje popravi? Kako pomoći da učenik-student:

1. Formira pozitivan stav prema matematici;
2. Razvija kritičko mišljenje;
3. Razvija istraživački duh;
4. Stiče matematičkih znanja koja su potrebna za modelovanje realnih problema;
5. Razvije matematičke komunikacije i slično.

Jedan od načina je pristupiti izmenama u izlaganju matematičkih sadržaja. Pri tome se misli na metodološke



izmene, pristupu problemima i uvođenje savremenih informacionih tehnologija za unapređenje nastave, odnosno korišćenje obrazovnih softvera. Od savremenog obrazovanja se zahteva i očekuje da "proizvede" visokoobrazovanu osobu, koja je sposobna da odgovori na zahteve i prati tendencije savremenog društva [1].

Pitanje koje se nameće jeste koliko smo svi otvoreni da prihvatimo promene i na koji način da ih započnemo?

ZAŠTO OBRAZOVNI SOFTVERI U NASTAVI MATEMATIKE?

Upotreba modernih informacionih tehnologija u obrazovanju nije prolaznog karaktera i predstavlja mnogo više od kombinovanja informacionih tehnologija sa tradicionalnom nastavom. Učenika – studenta, pre svega treba naučiti da misli i osposobiti da može da prati savremena tehnološka dostignuća. Otuda se nameću zahtevi za usavršavanjem metoda i sredstava učenja. Svedoci smo da učenici danas koriste Android, Ipad, iPhone, tablete, laptopove i imaju pristup internetu. Tokom časa mogu da proveravaju informacije koje im daju nastavnici i da ih ispravljaju. Njihovi nastavnici i roditelji u najvećoj meri ne koriste savremena dostignuća. Naš posao je da se prilagodimo njihovom okruženju u kome su odrasli i da shodno tome organizujemo nastavu, a za to su nam u nastavi matematike potrebni obrazovni softveri.

Glavni problem nastave matematike je što matematika podrazumeva rad na visokom nivou apstrakcije. U nastavi matematike treba skladno povezati činjenice, veštine, konceptualne strukture, metode i generalne strategije u rešavanju problema. Mora se priznati da to baš i nije lak zadatak. Pri tom nailazi se na ukorenjenu odbojnost ka matematici kao "teškom" nastavnom predmetu. Pitanje: "Zašto je matematika teška za učenje?" Potrebno je detaljno proučiti sve relevantne faktore za sticanje matematičkih znanja. Takva istraživanja mogu znatno doprineti tome da se učenje matematike učini efikasnijim. U svakom slučaju, u nastavi matematike mora postojati informaciona povratna sprega u odnosu na svaku učeničku aktivnost [2].

Obrazovni softveri su računarski programi koji se mogu koristiti u nastavi. Moguće je uočiti dva osnovna oblika nastave pomoću računara:

1. nastava u kojoj računar učestvuje u svim etapama nastave,
2. nastava u kojoj računar učestvuje u samo nekim etapama nastave.

U oba slučaja upotreba softvera treba da pokrije sve etape nastavnog procesa to su: 1) Pripremanje učenika; 2) Izlaganje novih sadržaja; 3) Uvežbavanje; 4) Ponavljanje; 5) Provera. Ovakav vid nastave treba da utiče na povećanje interaktivnosti, gde nastavnik neće biti samo izvor informacija u okviru časa, već će pomoći aktivno učestvovanje učenika u nastavi kroz koordinaciju resursa. Na ovaj način se postiže da se brže i kvalitetnije pamte nastavni sadržaji, razmišlja se, analizira se, zaključuje se, otkrivaju novi pojmovi i na kraju ono što je i najbitnije rešavaju se zadati problemi.

Svedoci smo raznih novih metoda, matematičkih softvera, sve sa ciljem da se popravi postojeće stanje. Svi ovi modeli učenja koncipirani su tako da profesori kreiraju nastavne sadržaje ili koriste gotove alate kao pomoćno sredstvo realizacije nastave.

Naša ideja je da nastavu matematike osavremenimo korišćenjem već postojećih softvera. Slobodno možemo reći da i njihov broj i raznolikost stvaraju konfuziju i kod nastavnika i studenata. Većina softvera u potpunosti pokriva matematičke sadržaje, omogućava izlaganje novog gradiva, vežbanje, testiranje i ostale aktivnosti. Iz tog razloga potrebno je da nastavnici dobro poznaju stanje na tržištu obrazovnih softvera, njihove mogućnosti i da pažljivo odaberu one softvere koji su im potrebni u konkretnim situacijama.

Među najčešće korišćenim komercijalnim alatima su: Mathematica, Maple, MatLab, Manipula Math with Java, Wiris, Sage; dok su među besplatnim najčešće korišćeni: Wolfram Alfa, Microsoft Mathematics, FreeMat, FreeMat Portable, GeoGebra, Octava, Scilab.

Jasno je da su savremeni simbolički softveri dovoljno moćni da obavljaju sve proračune za srednjoškolsko gradivo matematike ali i za proračuna na univerzitetskom nivou. Dakle, pitanje koje se nameće je u kojoj meri i kada se, prilikom realizacije nastave, treba osloniti na računar odnosno softver. Da li vrste softvera koji su trenutno u upotrebi ispunjavaju sve tradicionalno definisane nastavne ciljeve i koji su načini njihove upotrebe u zavisnosti od koncepta nastave. U skoro svim nacionalnim nastavnim planovima i programima, upotreba računara je obavezna, ili se barem snažno preporučuje. Upotreba alata dozvoljava drugačije pristupe nastavi kao i kreiranje velikog broja različitih metoda realizacije nastave. Međutim pitanje je koliko se to zaista i ostvaruje [3].

Nastava podržana informacionim tehnologijama odnosno učenje, je pre svega povezano sa eksperimentalnom matematikom gde se svako dokazivanje - u vezi matematike pretežno realizovalo "ručno" ili se podrazumevalo. Polazili smo od pretpostavke da korišćenje alata za kreiranje studentima razumljivih odnosno čitljivih primera, eksperimentalnom modelu može dati formalni deo. Cilj je bio da studenti posmatraju tok matematičkih operacija kroz kod, obzirom da je ovakav način pisanja njima već usađen.

PREDLOG MODELA NASTAVA U KOJOJ RAČUNAR UČESTVUJE U SAMO NEKIM ETAPAMA

Odlučili smo se za alat MatLab. Glavni razlog ovakvog izbora svodio se na dve važne činjenice. Prvo matematika se može lepo i jednostavno izlagati i učiti i drugo, zbog svog kvaliteta primenjuje se u nastavi na višim godinama studiranja, pa bi ovo bila velika pomoć studentima u kasnijem periodu. U cilju predloženog na Univerzitetu Singidunum još davne 2004 godine krenulo se sa korišćenjem programskog paketa MatLab u realizaciji nastavnog procesa predmeta matematika. Dakle, sve nastavne jedinice predmeta Matematika smo obradili kroz MatLab. Shodno programskim sadržajima napravljen je praktikum kojim



su sve programske celine obrađene i definisane. Naravno kako se menjao i modifikovao sam softver od prve korišćene verzije 2004 do današnjih dana, menjao se i rad sa njim. Jedina suštinska promena je nastala kada se prešlo na verziju 5,6 kada su uvedene simboličke funkcije. Uvođenjem simboličkih funkcija omogućeno je rešavanje mnogo šireg spektra problema nego do tada i naravno jednostavnijim putem. Šta nam je bio izazov? Kao što znamo, MatLab se koristio za numerička izračunavanja, baziran na matricama i vektorima kao polaznim veličinama. Sa druge strane sva postojeća literatura bila je usmerena isključivo studentima tehnike i samim time usmerena ka njihovoj problematici. Kako je matematika bazni predmet ne samo na tehnicima, već i na većini prirodnih studija, a znamo da prosečan student ima određeni otpor prema predmetu, ideja je bila kako na novi, zanimljiviji i sam time jednostavniji način učiti matematiku.

UPOTREBA MATLAB ALATA U NASTAVI

Kada čujemo reč MatLab većina ljudi nije svesna mogućnosti koje „taj“ softverski paket pruža. Jednom rečju to je moćan softver. MatLab je viši programski jezik razvijen sredinom 80-tih u kući MatWork. Prvenstveno je bio namenjen inženjerima, ali je za kratko vreme postao standardni programski paket na univerzitetima širom sveta. Osnovna namena je numeričko rešavanje problema, ali kako poseduje odličnu 2D i 3D grafiku, rad sa simboličkim promenljivim njegove mogućnosti su ogromne. U sebi sadrži posebne pakete, module, koji se nazivaju Toolbox-ovi. Proizvođač stalno dodaje nove. Nazvan je prema MATrix LABoratory (laboratorija za matrice). Cena je oko 100\$ po studentu i možemo reći da je MatLab skup komercijalan program [5]. Naravno, danas on ima mnogo besplatnih klonova, među kojima su: Octava, Scilab, FreeMat. Ovi programi su kompatibilni sa MatLab-om sa oko 95%.

Postoji veliki broj knjiga, udžbenika i priručnika koji omogućavaju učenje MatLab-ovih funkcija i njegove primene. Oni pokrivaju različite sadržine sa izobiljem ilustracija, a određene vizuelizacije lako je naći i na internetu.

Drugo ozbiljno pitanje je integrisanje MatLab-ovih sadržaja u nastavni proces. Mi smo u našem radu krenuli od bazičnog nivoa sa korišćenjem ograničenog broja komandi koje se lako mogu naučiti nakon savladavanja osnovnih pravila MatLab-ove sintakse i radne okoline. To je važno zato što se program koristi na kasnijim godinama studiranja i drugi autori, istraživači i edukatori mogu koristiti ovaj način da kreiraju svoje edukativne materijale.

Iako je celokupna sadržina predmeta matematike obrađena kroz vežbe u programskom paketu MatLab, u ovom radu date su neke ideje kako rešavati integrale i primenjuju ih u rešavanju problema dužine luka krive, površine ravnih likova i zapremine obrtnih tela. Te programske celine su izabrane iz razloga što kreirani edukativni materijali imaju naglašenu vizuelnu komponentu

Na ovaj način ostvarena su dva cilja:

- ♦ uspostavljena je veza između aktuelnog matematičkog problema koji se izučava i vizualizacijske alatke u svakoj situaciji gde je vizuelizacija važna za suštinsko razumevanje tog matematičkog problema;
- ♦ mogućnost postizanja izvesnog stepena interaktivnosti: da se u određenoj nastavnoj situaciji na licu mesta mogu dobijati vizuelizacije dinamičkih procesa ili vizuelizacije promena koji nastaju promenom određenih parametara.

Matematički problemi sa kojim se srećemo u navedenim oblastima zadati su izrazima koji sadrže simboličke promenljive, odnosno koji nemaju numeričku vrednost u trenutku izvršenja. Rezultat takvih operacija je simbolički izraz. Komande i funkcije za simboličke operacije imaju istu sintaksu i stil rada kao komande za numeričke operacije. Simbolički objekti mogu biti promenljive (kojoj nije dodeljena numerička vrednost), brojevi ili izrazi sastavljeni od simboličkih promenljivih i brojeva[6].

Problemi se rešavaju kroz mogućnosti kreiranja grafika na različite načine, od najjednostavnijih za crtanje funkcije do opisnih zavisnih podataka koji se grafički predstavljaju. Dakle potrebno je da određeni alat podržava 2D i 3D crtanje diskretnih, neprekidnih, vektorskih podataka, zatim animacije i simulacije. Ono što je takođe bitno su i mogućnosti detaljnih opisa grafika i generisanja različitih tipova izlaznih formata.

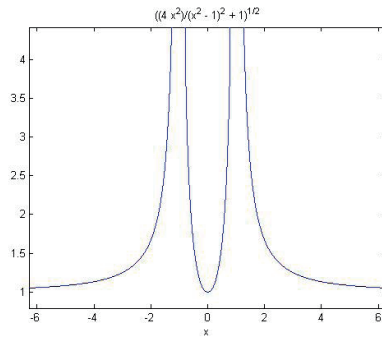
PRIMERI REŠAVANJA INTEGRALA POMOĆU MATLAB-A

U ovom radu dato je nekoliko osnovnih primera koji se koriste u realizaciji nastave predmeta matematika primenom MatLab-a. Studenti su dobijali ogledne primere kroz koje su se upoznavali sa funkcijama za rešavanje datih zadataka kao i sa njihovim atributima.

Najjednostavniji primeri bazirani na primeni integrala su problemi izračunavanja luka krive. Problemi sa kojima se sreću studenti su u činjenici da su zadate krive u principu složene funkcije, koje nisu vizuelno prepoznatljive. Studenti su najčešće samo primenjivali obrazac za izračunavanje luka krive bez vizuelnog saznanja o stvarnom obliku. Primenom MatLab-a, osim numeričkog izračunavanja određenog integrala, koje samo po sebi ne mora da bude jednostavno, dobija se vizuelna predstava zadatog problema. U suštini softver računa integral, a zatim u 2D grafici dobijamo sliku zadate funkcije i izgled luka koji čiju dužinu želimo da izračunamo.

Za izračunavanje dužinu luka krive funkcije $y = \ln(1 - x^2)$ na intervalu $x \in [-1/2, 1/2]$, studenti su trebali da kroz set naredbi definišu i nacrtaju funkciju kao i da primene formulu za računanje dužinu luka krive [8]:

```
syms x
y=log(1-x.^2);
f=sqrt(1+diff(y).^2);
l=int(f,-1/2,1/2)
double(l)
```

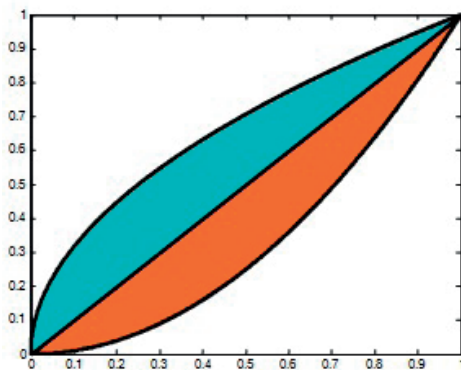


Sl. 1. Primer funkcije u MatLab-u

Sledeći primer u sebi sadrži 3 matematička koraka. Prvi je određivanje granica integracije, što podrazumeva rešavanje sistema jednačina, drugi korak je izračunavanje određenog integral i treći korak je vizuelizacija problema, odnosno crtanje slike. Primer je u metodološkom smislu veoma značajan jer u sebi sadrži matematičko prepoznavanje problema sa jedne strane, a sa druge strane numeričko izračunavanje i vizualizaciju realizuje preko softvera.

Dakle, studenti treba da obeleže površinu ograničenu funkcijama $f_1(x) = x^2$ i $f_2(x) = \sqrt{x}$ potom da izračunaju površinu dobijene figure. U ovom primeru oni već samostalno osmišljavaju tok naredbi i crtaju površinu. Bitno je naglasiti da je njihov način pisanja naredbi posledica matematičkih koraka rešavanja zadatka. Primer seta naredbi i grafika je dat u nastavku:

```
syms x
f1=x.^2;
f2=sqrt(x);
f3=f1-f2;
x=solve(f3)
x=0:0.001:1;
fill([0,x,1],[0,x.^2,1],'g',[0,x,1],[0,sqrt(x),1],'r')
syms x
f1=x.^2;f2=sqrt(x);
P=int(f2,0,1)-int(f1,0,1)
double(P)
```



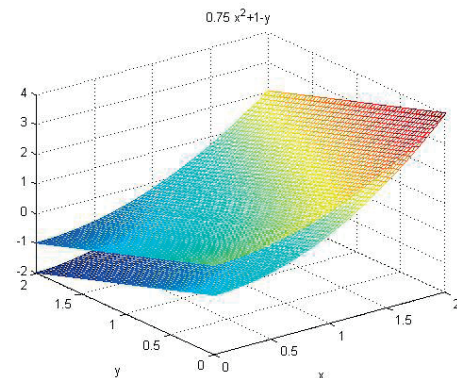
Sl. 2. Primer samostalnog rada studenata u MatLab-u

Izračunavanje zapremine, a pogotovu obrtnog tela studentima nije lako, pre svega zbog nedostatka vizualizacije problema. Student najčešće nije u mogućnosti da sagleda oblik obrtnog tela, koje je zadano dvodimenzionim krivama. MatLab omogućava da se vidi traženo telo u prostoru

3D. Zato se u primeru gde je potrebno izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko x-ose površi ograničene

linijama $y = x^2$ i $y = 0.75x^2 + 1$.

```
syms x y
z1=x^2-y
z2=0.75*x.^2+1-y
[x1 y1]=solve(z1,z2)
f=2*pi*((3/4*x.^2+1)^2 - (x.^2)^2)
z=int(f,0,2)
ezmesh('x^2-y', [0,2])
hold on
ezmesh('0.75*x.^2+1-y', [0,2])
```



Sl. 3. Primer 3D crtanja studenata u MatLab-u

ANALIZA PRIMENE MATLAB-A U ODREĐENIM ETAPAMA NASTAVE

Ovi primeri pokazuju koliko MatLab omogućava pre svega razumevanju matematičkih pojmova. Ni u jednom trenutku ne bi trebalo pomisliti da MatLab može da u potpunosti zameni nastavnika u tradicionalnom delu nastavnog procesa. Da bi se problemi mogli rešavati potrebno je matematičko znanje i prepoznavanje problema. Tradicionalni način rešavanja nekog od ovih problema uz dobro poznavanje metoda integracije zahteva i znanje o osobinama funkcija da bi se vizuelno predstavile, a zatim i veći stepen apstrakcije da se na osnovu 2D slike zamisli 3D slika [6].

Ovakav koncept rada korišćenjem MatLab, kao pomoćnog sredstva, omogućava da se zanemare numerička izračunavanja. Naravno, to ne znači da njihovo izučavanje nije potrebno. Sa upotrebom softvera, studenti mogu pomerati klizač kojim se na primer podešava x-koordinatu tačke na krivoj i automatski se menja površina. Dobijaju se vizuelno različite situacije, a samim tim i mnogo jasnija slika koncepta primene određenih integrala.

ZAKLJUČAK

Prateći savremene trendove u metodici matematike i inovacije nastave matematike, veoma je važno da se istraživanja sprovedu u cilju ispitivanja uticaja informacionih tehnologija na znanja koja se odnose na specifične oblasti matematike na svim obrazovnim nivoima, kako i na doživljaj studenata tokom učenja matematike inoviranim prilazima u savremenom matematičkom obrazovanju.



Reprezentacija i vizuelizacija matematičkih pojmova je danas moguća zahvaljujući raznim oblicima dinamičkih softvera koji omogućavaju da student vidi i istražuje matematičke relacije i koncepte iskaze. Sve ove pojmove bi bilo teško u potpunosti prikazati bez upotrebe informacionih tehnologije. Najveći uticaj informacione tehnologije imaju u pojavi interakcije koja dozvoljava mogućnost dodatnog, jasnijeg, složenijeg objašnjenja matematičkih pojmova.

LITERATURA

- [1] Clark-Wilson, Alison, Robutti, Ornella, Sinclair, Nathalie (Eds.) An International Perspective on Technology Focused Professional Development Series: Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 2 2014
- [2] Jelena Gavrilović, Ivana Kostić Kovačević, Ana Savić, Primena matematičkih obrazovnih alata u nastavnom procesu, *Infoteh Jahorina*, Jahorina, Elektrotehnički fakultet Istočno Sarajevo, 2012, 843-847
- [3] Programirana nastava i nastava uz pomoć kompjutera, Beograd, Naučna knjiga, 1997
- [4] Lumb, S., J. Monaghan, and S. Mulligan, Issues arising when teachers make extensive use of computer algebra in their mathematics lessons. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 2000. 7 (4): p. 223- 240.
- [5] <http://www.mathworks.com/products/matlab/>
- [6] Ana Savić, Jelena Gavrilović, Ivana Kostić Kovacević, Free software for learning mathematics “ *International Journal of Science, Inovation and New Technology* , february 2012, vol.1.No 3.
- [7] Marko Marković, Ivana Kostić Kovačević, Olivera Nikolić, Boško Nikolić INSOS—educational system for teaching intelligent systems, *Computer Applications in Engineering Education* 01/2014;
- [8] Ivana Kostić Kovačević, *Matematika Univerzitet Singidunum*
- [9] Patricia Cretchley, Chris Harman, Nerida Ellerton, and Gerard Fogarty, MATLAB in Early Undergraduate Mathematics: An Investigation into the Effects of Scientific Software on Learning *Mathematics Education Research Journal* 2000, Vol. 12, No.3, 219-233

EDUCATIONAL SOFTWARE IN TEACHING MATHEMATICS

Abstract:

The primary use of computer tools for mathematical purposes is a quality team and verification of results. There are different software solutions for improvement logic of participants based on developing interactivity. Mathematics educational software are designed for innovative, interactive and dynamic teaching in various areas of mathematics. This paper aims to describe the educational software with which it can develop interactivity and therefore can be incorporated into a platform for distance learning. This paper aims to describe the educational software with which you can develop interactive and help students better and clearer understanding of the math and realize that it is mathematics all around us.

Key words:

Educational software,
Teaching Mathematics,
Matlab.